Noções Básicas de Lógica e Conjuntos

Notas de Aula

Prof. Dr. Clayton Eduardo Lente da Silva

Universidade Federal de Rondonópolis

Março de 2026

Resumo

Estas notas de aula dedicam-se ao estudo das noções básicas de lógica e conjuntos, que constituem os alicerces sobre os quais se ergue o edifício do pensamento matemático moderno. Destinado aos alunos de licenciatura, este texto não pretende — e nem teria fôlego para tal — esgotar as complexas discussões da Lógica Matemática ou da Teoria Axiomática dos Conjuntos, áreas vastas e profundas da investigação científica. O que propomos aqui é, como o título sugere, o exame de noções fundamentais, de ferramentas conceituais essenciais para o dia a dia do matemático. Nosso objetivo é instrumental: aprender a manusear quantificadores, entender a estrutura de uma condicional, operar com conjuntos e compreender como uma teoria matemática se organiza a partir de axiomas, definições, teoremas, lemas e corolários. Essas são as ferramentas com as quais se provam teoremas em Álgebra, Análise, Geometria e em tantas outras áreas.

Versão: 1.1

Última atualização: 4 de maio de 2026

Sumário

1 Introdução

A Matemática é frequentemente descrita como a ciência das estruturas e padrões. Mas antes de investigar padrões em números, formas ou funções, há uma camada mais fundamental: o próprio *método* pelo qual a matemática produz conhecimento. Esse método é a *lógica*, e o ambiente onde ele opera são os *conjuntos*. Dominar essas noções é, portanto, o primeiro passo para compreender como a Matemática se constrói e se justifica.

Aristóteles (384–322 a.C.), já na Antiguidade, sistematizou de forma pioneira a lógica — a arte de bem raciocinar. Ao organizar os princípios do pensamento válido e criar o silogismo, ele estabeleceu as bases do que hoje chamamos de *lógica formal*. Durante mais de dois mil anos, o *Organon* [1] aristotélico foi a referência para o estudo do argumento correto.

Mas foi no século XIX que a lógica deu um grande salto. O período exigia respostas para instabilidades teóricas na análise e na aritmética. Nesse cenário, matemáticos como George Boole (1815–1864) [2] e Gottlob Frege (1848–1925) [3] compreenderam que a lógica não era apenas um acessório do pensamento, mas a linguagem que poderia conferir a segurança necessária às bases da Matemática. Ao aplicarem o rigor e a linguagem simbólica ao estudo do próprio raciocínio, eles deram origem à *lógica matemática*. Hoje, seus desdobramentos vão muito além da matemática: fundamentam a ciência da computação, a inteligência artificial, o estudo dos fundamentos da física e a própria filosofia da ciência.

Quase simultaneamente, o matemático alemão Georg Cantor (1845–1918) [4] desenvolvia uma nova teoria: a dos *conjuntos* — a morada dos objetos matemáticos. Para Cantor, um conjunto é uma coleção de objetos determinados. O que parecia uma ideia modesta revelou-se revolucionária: praticamente todos os objetos da Matemática — números, funções, formas geométricas, sequências — podem ser definidos como conjuntos. A teoria dos conjuntos tornou-se a linguagem universal da Matemática.

No entanto, a aparente simplicidade esconde profundidade e armadilhas. O filósofo e matemático britânico Bertrand Russell (1872–1970) [5] identificou em 1901 um problema fundamental: o que fazer com o **conjunto de todos os conjuntos que não contêm a si mesmos como elemento**? Se esse conjunto contém a si mesmo, então, por definição, não deveria conter; se não contém a si mesmo, então, por definição, deveria conter. Essa contradição, conhecida como *Paradoxo de Russell*, mostrou que a noção ingênua de conjunto ("qualquer coleção de objetos determinados") leva a inconsistências lógicas.

Esse paradoxo motivou o desenvolvimento de teorias axiomáticas — como a ZFC (Zermelo-Fraenkel) [6] com o axioma da escolha — que estabelecem regras rigorosas para a formação de conjuntos, evitando as contradições e permitindo que se investiguem questões profundas, como a famosa *hipótese do continuum* (sabemos hoje que ela não pode ser provada nem refutada a partir dos axiomas usuais — um dos resultados mais surpreendentes da matemática do século XX).

Nestas notas, não nos aprofundaremos nas teorias de lógica nem de conjuntos, nem nos paradoxos, nem nos teoremas de incompletude de Gödel [7] (que mostram que qualquer sistema axiomático consistente suficientemente poderoso contém afirmações que não podem ser provadas nem refutadas dentro dele). Isso exigiria um curso inteiro. O que propomos aqui é mais modesto, mas essencial: um exame cuidadoso das **noções básicas** de lógica e conjuntos, com ênfase nas ferramentas que o futuro professor de matemática usa diariamente.

Desse modo, o licenciando estará melhor preparado para cursos como Análise Real, Álgebra Linear e Topologia — disciplinas em que a linguagem de conjuntos e a precisão lógica são fundamentais. A escolha por uma abordagem progressiva visa privilegiar a clareza conceitual e o rigor suficiente para a transição entre a linguagem natural e a linguagem simbólica.

Muitas vezes, o estudante ingressa no curso superior com uma intuição aguçada, mas carece da estrutura formal para organizar demonstrações e articular argumentos de forma irrepreensível. Nesse contexto, a lógica atua como a gramática da matemática, fornecendo as regras de sintaxe que garantem que nossas conclusões derivem legitimamente de nossas premissas.

Como bem observou Descartes, a lógica é a arte de bem conduzir a razão, e é sob essa perspectiva prática que estruturamos este percurso. Ao longo das próximas páginas, o estudante encontrará um equilíbrio entre o contexto histórico — que nos lembra que a matemática é uma construção humana e situada — e a formalização técnica. Esperamos que, ao final destas notas, o licenciando não apenas domine os símbolos, mas compreenda a "lógica da coisa", sentindo-se apto a ler e escrever textos matemáticos com a precisão que a profissão exige.

2 Noções Básicas de Lógica Matemática

2.1 Breve Contexto Histórico

A palavra lógica tem origem no grego antigo *logiké* (arte de raciocinar), derivado de *logos*, que significa "razão", "ideia", "palavra", "estudo" ou "discurso". Em sentido amplo, a lógica é o estudo dos princípios do raciocínio válido — isto é, das formas corretas de pensar e argumentar. Ela busca distinguir argumentos bons (válidos) daqueles falaciosos (inválidos), fornecendo critérios objetivos para essa avaliação. Por isso, a lógica não se preocupa com o conteúdo específico das afirmações, mas sim com a estrutura que garante a correção do raciocínio.

Se a lógica não se preocupa com o conteúdo específico das afirmações, então uma pergunta natural surge: quem se preocupa? A resposta é: cada área do conhecimento se ocupa do conteúdo que lhe é próprio. A Matemática preocupa-se com verdades matemáticas; a Física, com verdades físicas; a Biologia, com verdades biológicas; e assim por diante. Cabe à lógica, por sua vez, fornecer as regras gerais que permitem, a partir de premissas verdadeiras (seja lá o que isso signifique em cada área), chegar a conclusões verdadeiras.

> A lógica é o instrumento de todas as ciências. É a arte de bem conduzir a razão no conhecimento das coisas. (DESCARTES, 1637) [8]

No dia a dia, usamos a lógica para organizar ideias, tomar decisões e defender pontos de vista. No entanto, muitas vezes ouvimos falas como: "Isto é assim porque eu acredito." ou "É, porque sim." — tais expressões não constituem argumentos de natureza lógica.

Embora antes já existissem estudos sobre argumentação entre os sofistas e os dialéticos megáricos (como Euclides de Mégara — não confundir com o Euclides de Alexandria), foi o filósofo grego Aristóteles quem primeiro sistematizou de forma abrangente os princípios do raciocínio válido, razão pela qual é frequentemente visto como uma figura central na história da lógica ocidental.

Nascido em Estagira, na Macedônia, Aristóteles foi discípulo de Platão e tutor de Alexandre, o Grande. Sua obra sobre lógica, organizada posteriormente sob o título *Organon* (que significa "instrumento"), estabeleceu as bases do pensamento lógico ocidental por mais de dois milênios.

Aristóteles propôs que toda ***proposição*** deve ser clara, sem ambiguidades, e que todo raciocínio válido segue certas regras estruturais. Ele foi o primeiro a sistematizar o estudo das formas de argumento — distinguindo entre premissas e conclusão — e criou a teoria do silogismo, uma forma de raciocínio dedutivo composto por duas premissas e uma conclusão: a premissa maior (uma afirmação universal), a premissa menor (uma afirmação particular) e a conclusão (que deriva das premissas). Eis um exemplo clássico:

- Todos os homens são mortais. (Premissa maior)
- Sócrates é homem. (Premissa menor)
- Logo, Sócrates é mortal. (Conclusão)

A influência de Aristóteles na lógica foi tão evidente que Immanuel Kant (1724–1804) [9], no final do século XVIII, chegou a afirmar que a lógica não precisara dar nenhum passo atrás desde Aristóteles, nem pudera dar nenhum passo adiante. Essa percepção de uma lógica "estática" só seria desafiada pelas transformações profundas do século XIX, quando lógicos como George Boole e Gottlob Frege ampliaram seus conceitos, dando origem à lógica matemática contemporânea. No entanto, os princípios aristotélicos permanecem como alicerces do pensamento lógico e são ensinados até hoje em cursos de matemática, filosofia, ciência da computação, ciências econômicas e em muitas outras áreas do conhecimento.

Enquanto a lógica tradicional (aristotélica) se preocupava com as formas do pensamento em linguagem natural, a lógica matemática vai além: ela aplica os métodos da matemática ao estudo da lógica propriamente dita. Em outras palavras, a lógica matemática formaliza os princípios do raciocínio por meio de uma linguagem simbólica precisa, o que permite analisar a correção de argumentos de maneira algorítmica.

2.2 Sentenças e Proposições

As sentenças da língua portuguesa podem ser classificadas em diversos tipos: *declarativas* (informam algo), *interrogativas* (formulam perguntas), *exclamativas* (expressam emoções, surpresas ou admirações), *imperativas* (exprimem ordens, pedidos ou conselhos) e *optativas* (exprimem desejos). Em matemática, trabalhamos exclusivamente com sentenças declarativas — aquelas que afirmam ou negam algo. No entanto, nem toda sentença declarativa será considerada.

Definição (Proposição)**.** Uma proposição, representada pela letra p, é uma sentença declarativa que pode ser classificada como *verdadeira* (V) ou *falsa* (F), sem que haja uma terceira possibilidade ou a ocorrência simultânea de ambos.

Exemplo. As sentenças abaixo não são proposições.

- Você estudou lógica hoje? (interrogativa)
- Que dia maravilhoso! (exclamativa)
- Leia este livro agora. (imperativa)
- Que tudo corra bem. (optativa)
- $x + 1 = 5$ (declarativa, mas aberta — depende do valor atribuído a x)
- Rondonópolis tem muitos habitantes. (declarativa, mas vaga — o que significa "muitos"? Sem uma definição precisa, não pode ser classificada como V ou F. Isso não torna a frase inútil, mas, para tratá-la logicamente, precisamos tornar "muitos" operacional — por exemplo, "mais de 200 mil habitantes".)

Observação. Essa distinção entre sentenças vagas e proposições é fundamental. A exigência de sentenças não ambíguas foi o que permitiu a transição histórica da lógica dialética (focada na persuasão e no debate) para a lógica formal. Ao tratar proposições como objetos determinados, a Matemática pôde transformar o raciocínio em um tipo de cálculo simbólico.

Exemplo. As sentenças abaixo são proposições.

- O Sol é uma estrela. (declarativa, verdadeira)
- $2 + 2 = 4$. (declarativa, verdadeira)
- $3 \times 5 = 10$. (declarativa, falsa)
- O único número natural primo e par é o dois. (declarativa, verdadeira)

- Três é menor do que dois. (declarativa, falsa)
- A capital de Mato Grosso é Cuiabá. (declarativa, verdadeira)

2.3 Princípios Fundamentais da Lógica

Aristóteles estabeleceu três princípios que fundamentam o raciocínio lógico:

- **Princípio da Identidade:** Todo objeto é idêntico a si mesmo. De forma simplificada: A é A. Se uma afirmação é verdadeira, ela permanece verdadeira dentro do mesmo contexto. Parece óbvio, mas é esse princípio que garante a estabilidade dos conceitos e evita ambiguidades.
- **Princípio da Não-Contradição:** Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo. Em outras palavras: é impossível que A seja B e A não seja B simultaneamente.
- **Princípio do Terceiro Excluído:** Para qualquer proposição, ou ela é verdadeira ou ela é falsa. Não existe uma terceira opção (meio-termo). Ou A é B ou A não é B.

2.4 Negação de uma Proposição

A partir de uma proposição p, podemos construir sua *negação*, denotada por $\neg p$ (lê-se "não p"), que tem valor lógico contrário ao de p. Se p é verdadeira, então $\neg p$ é falsa; se p é falsa, então $\neg p$ é verdadeira.

p	$\neg p$
V	F
F	V

Exemplo. Seja p a proposição "$3 \times 5 = 10$". Como p é falsa, sua negação é verdadeira: $\neg p$ é a proposição "$3 \times 5 \neq 10$".

Exemplo. Seja p a proposição "O número 7 é par" (falsa). Sua negação $\neg p$ é "O número 7 não é par" (verdadeira).

Na linguagem natural, a negação pode ser expressa de diversas formas: acrescentando o "não" antes do verbo, ou ainda usando expressões como "não é verdade que". O importante é que o valor lógico seja invertido.

2.5 Proposições Compostas

A partir de proposições simples, podemos formar proposições compostas utilizando *conectivos lógicos*. Os mais importantes são:

2.5.1 Disjunção

A disjunção de duas proposições p e q, denotada por $p \vee q$ (lê-se "p ou q"), é verdadeira quando **pelo menos uma** das proposições é verdadeira.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemplo. "$2 + 2 = 5$ ou $\sqrt{9} = 3$" é uma proposição verdadeira, pois a segunda é verdadeira.

Observação. Note que, na lógica clássica, o conectivo "ou" ($\vee$) é **inclusivo**. Ou seja, a proposição composta é verdadeira se *pelo menos uma* das partes for verdadeira, incluindo o caso em que ambas são. Na linguagem cotidiana, frequentemente usamos o "ou" de forma exclusiva ("Ou você estuda, ou você joga."), mas em matemática, o uso padrão é o inclusivo.

2.5.2 Conjunção

A conjunção de duas proposições p e q, denotada por $p \wedge q$ (lê-se "p e q"), é verdadeira **apenas quando ambas** as proposições são verdadeiras.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemplo. "$2 + 2 = 5$ e $\sqrt{9} = 3$" é uma proposição falsa, pois a primeira é falsa.

2.5.3 Condicional

A condicional $p \to q$ (lê-se "se p, então q") é falsa **apenas quando** p é verdadeira e q é falsa. Nos demais casos, é verdadeira.

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Exemplo. Considere a proposição condicional "Se chover, então eu não sairei de casa". Observe que, se não chover, nada é afirmado sobre o que ocorrerá: posso sair ou não sair de casa. Nesse caso:

- Se não chover e eu sair, a condicional é verdadeira.
- Se não chover e eu não sair, a condicional também é verdadeira.
- Se chover e eu não sair de casa, a condicional é verdadeira.
- Se chover e eu sair de casa, a condicional é falsa.

Portanto, a única situação em que a condicional $p \to q$ é falsa ocorre quando p é verdadeira e q é falsa.

Observação. O fato de a condicional ser considerada verdadeira quando o antecedente p é falso pode causar estranhamento no início. Trata-se de uma convenção da lógica clássica, conhecida como *ex falso quodlibet* ("do falso, segue-se qualquer coisa"). Na condicional, não se exige que o antecedente tenha qualquer relação de significado com o consequente. Por exemplo: "Se $2 + 2 = 5$, então Paris é a capital da França." é considerada verdadeira na lógica clássica, ainda que o antecedente seja falso e não tenha nenhuma conexão temática com o consequente.

2.5.4 Bicondicional

A bicondicional $p \leftrightarrow q$ (lê-se "p se e somente se q") é verdadeira **quando p e q têm o mesmo valor lógico** (ambas verdadeiras ou ambas falsas).

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exemplo. A proposição "Não saio de casa se e somente se chove" é uma bicondicional, que equivale à conjunção de duas condicionais:

- "Se chove, então não saio de casa" ($p \to q$)
- "Se não saio de casa, então chove" ($q \to p$)

Esta sentença é falsa em duas situações:

- Se chove e eu saio de casa (quebra a primeira condicional).
- Se não chove e eu não saio de casa (quebra a segunda condicional).

Nos demais casos, a bicondicional é verdadeira.

2.6 Quantificadores

Sentenças abertas como $x + 1 = 5$ não são proposições, pois seu valor lógico depende do valor atribuído à variável x. Para transformá-las em proposições, utilizamos os *quantificadores*, que indicam a quantidade de elementos do universo que satisfazem uma determinada propriedade.

Definição (Quantificador Universal)**.** O quantificador universal $\forall$ significa "para todo" ou "qualquer que seja". A sentença $\forall x, P(x)$, é uma sentença verdadeira se $P(x)$ é verdadeira para **todos** os elementos do conjunto considerado.

Exemplo. $\forall x \in \mathbb{R}, x+1 = 5$. É falsa, pois nem todo número real satisfaz a igualdade (apenas $x = 4$ a satisfaz).

Exemplo. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$. É verdadeira, pois todo número real elevado ao quadrado é não negativo.

Definição (Quantificador Existencial)**.** O quantificador existencial $\exists$ significa "existe" ou "existe pelo menos um". A sentença $\exists x, P(x)$, é uma sentença verdadeira se existe **pelo menos um** elemento no conjunto considerado para o qual $P(x)$ é verdadeira.

Exemplo. $\exists x \in \mathbb{R}, x + 1 = 5$. É verdadeira, pois $x = 4$ satisfaz a igualdade.

Exemplo. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$. É falsa, pois nenhum número real elevado ao quadrado é negativo.

O universo de discurso (o conjunto ao qual as variáveis pertencem) é fundamental. A sentença $\exists x, 2x = 1$, é verdadeira em $\mathbb{R}$, mas falsa em $\mathbb{N}$.

2.7 Negação de Proposições Quantificadas

A negação de uma proposição quantificada obedece às seguintes regras:

- Equivalência lógica ($\equiv$) da negação do quantificador universal:

  $$\neg\big(\forall x, P(x)\big) \quad \equiv \quad \exists x, \neg P(x)$$

  Em palavras: negar que "todos os elementos satisfazem $P(x)$" significa afirmar que "existe pelo menos um elemento que não satisfaz $P(x)$".

- Equivalência lógica ($\equiv$) da negação do quantificador existencial:

  $$\neg\big(\exists x, P(x)\big) \quad \equiv \quad \forall x, \neg P(x)$$

  Em palavras: negar que "existe um elemento que satisfaz $P(x)$" significa afirmar que "nenhum elemento satisfaz $P(x)$", isto é, "qualquer que seja o elemento, ele não satisfaz $P(x)$".

Exemplo. Negações de proposições quantificadas:

- A proposição "Todo número par é divisível por 2" é verdadeira. Sua negação é "Existe um número par que não é divisível por 2", que é falsa.

- A proposição "Existe um homem que não é mortal" é falsa. Sua negação é "Todo homem é mortal", que é verdadeira.

- Seja $P(x)$ a sentença $x + 1 = 5$, com $x \in \mathbb{R}$. A proposição $\forall x \in \mathbb{R}, x + 1 = 5$ é falsa. Sua negação é $\exists x \in \mathbb{R}, x + 1 \neq 5$, que é verdadeira (pois, por exemplo, $x = 0$ satisfaz).

Note que a negação de uma proposição com quantificador troca o quantificador (universal vira existencial, e vice-versa) e nega a propriedade $P(x)$. Esse princípio é conhecido como *Leis de De Morgan para Quantificadores*.

2.8 Argumentos e Validade

Um *argumento* é uma sequência de proposições, chamadas premissas, que visam justificar uma proposição final, chamada conclusão. A validade de um argumento depende apenas da sua forma lógica, e não do conteúdo das proposições.

- **Argumento válido:** Um argumento é válido quando a conclusão é verdadeira sempre que todas as premissas são verdadeiras. Em outras palavras, não é possível que todas as premissas sejam verdadeiras e a conclusão seja falsa.

- **Argumento inválido (falácia):** um argumento é inválido quando existe pelo menos uma situação em que todas as premissas são verdadeiras e a conclusão é falsa.

Observação. A definição de validade só impõe uma condição quando as premissas são verdadeiras. Se as premissas são falsas, nada é exigido: um argumento pode ser válido mesmo com premissas falsas. Da mesma forma, um argumento pode ter premissas verdadeiras e ser inválido.

Exemplo. Um exemplo de argumento válido é: "Todos os alunos que obtiverem pontuação 10 ganharão chocolate; o aluno João não ganhou chocolate; logo, João não obteve pontuação 10." Outro exemplo: "Quem ganha na loteria fica rico; Margot ganhou na loteria; logo, Margot ficou rica." Mais um: "Todos os peixes voam; todo animal que voa é mamífero; logo, todo peixe é mamífero."

Exemplo. Um exemplo de argumento inválido (falácia) é: "Toda fada tem asas; Amelie tem asas; logo, Amelie é uma fada." Outro exemplo: "Sempre que chove, a calçada fica molhada; não choveu; logo, a calçada não ficou molhada." Mais um: "Todo cachorro é mamífero; todo gato é mamífero; logo, todo cachorro é gato."

2.9 Implicação e Equivalência Lógica

Na lógica formal, é fundamental distinguir o *condicional* ($p \to q$) da *implicação lógica* ($p \Rightarrow q$) e o *bicondicional* ($p \leftrightarrow q$) da *equivalência lógica* ($p \Leftrightarrow q$).

O *condicional* $p \to q$ é um conectivo lógico que produz uma nova proposição a partir de p e q. Seu valor lógico é dado pela tabela-verdade. A *implicação lógica* $p \Rightarrow q$ não é uma proposição, mas sim uma *relação* entre proposições. Dizemos que p *implica logicamente* q (e escrevemos $p \Rightarrow q$) quando o condicional $p \to q$ é **verdadeiro em todas as interpretações possíveis** (ou seja, é uma tautologia). Em termos práticos: é impossível que p seja verdadeira e q seja falsa.

Observação. Se p for falsa, a implicação $p \Rightarrow q$ é considerada válida (por **vacuidade**), pois o condicional $p \to q$ é verdadeiro nesse caso. No entanto, esse cenário não fornece informações úteis para uma demonstração direta, já que partimos da hipótese de que p é verdadeira quando queremos provar $p \Rightarrow q$.

A implicação é logicamente equivalente à sua *contrapositiva*, ou seja, provar uma é o mesmo que provar a outra:

$$p \Rightarrow q \quad \equiv \quad \neg q \Rightarrow \neg p$$

O *bicondicional* $p \leftrightarrow q$ é um conectivo lógico que produz uma nova proposição a partir de p e q. Seu valor lógico é dado pela tabela-verdade. Na *equivalência lógica* ($p \Leftrightarrow q$), as proposições p e q possuem o mesmo valor lógico em todas as interpretações. Isso significa que $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$ ocorrem simultaneamente. A equivalência lógica é a conjunção das duas implicações:

$$p \Leftrightarrow q \quad \equiv \quad (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

Observação. Em muitos textos de matemática, os símbolos $\to$ e $\Rightarrow$ são usados de forma intercambiável, o que gera confusão. Aqui adotamos a distinção clássica: $\to$ é conectivo (aparece dentro de fórmulas), $\Rightarrow$ é relação metateórica (afirma que uma implicação é logicamente válida). O mesmo vale para $\leftrightarrow$ e $\Leftrightarrow$.

3 Noções Básicas de Conjuntos

3.1 Conjuntos e Pertinência

Um conjunto é determinado pelos seus *elementos* (ou pela ausência deles). A ideia fundamental é a seguinte: dado um conjunto A e um objeto arbitrário a, podemos decidir se a pertence ou não a A. A relação entre um objeto e um conjunto é a *pertinência*: se a pertence a A, dizemos que a é um *elemento* de A e escrevemos $a \in A$. Caso contrário, escrevemos $a \notin A$ (lê-se “a não pertence a A”).

Observação (Nota Histórica). Essa forma de abordar conjuntos — baseada apenas na propriedade de pertinência — caracteriza a chamada *Teoria Ingênua dos Conjuntos.* Historicamente, essa simplicidade levou ao Paradoxo de Russell, o que forçou a Matemática a adotar sistemas axiomáticos mais rígidos, como o de Zermelo-Fraenkel (ZF), para evitar a existência de conjuntos "patológicos". Nestas notas, seguiremos a abordagem clássica e intuitiva, suficiente para a prática matemática cotidiana.

Exemplo. Considere o conjunto V das vogais do alfabeto da língua portuguesa. Esse conjunto pode ser apresentado listando seus elementos entre chaves: $\{\mathrm{a}, \mathrm{e}, \mathrm{i}, \mathrm{o}, \mathrm{u}\}$. A letra b não é elemento de V: $\mathrm{b} \notin V$. A letra u é elemento de V: $\mathrm{u} \in V$.

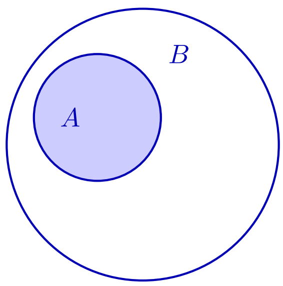
Dois conjuntos especiais merecem destaque. O primeiro deles é o conjunto *vazio*, que não possui elementos; é denotado por $\varnothing$ (ou $\{\}$). O outro é o conjunto *unitário*, que possui exatamente um elemento.

Exemplo. O conjunto de letras do alfabeto português que não possuem valor fonético (isto é, não têm som) é o conjunto unitário $\{\mathrm{h}\}$. Já o conjunto de consoantes na palavra "aia" é o conjunto vazio $\varnothing$.

3.2 Inclusão e Igualdade

Definição (Inclusão)**.** Sejam A e B conjuntos. Se todo elemento de A for também elemento de B, dizemos que A é um *subconjunto* de B, ou que A *está contido* em B. Indicamos isso por $A \subset B$.

Para visualizar relações entre conjuntos, usamos os **diagramas de Euler-Venn**: os conjuntos são representados por regiões planas delimitadas por curvas fechadas (geralmente círculos ou elipses).



$A \subset B$ (todos os elementos de A estão em B)

Quando A não está contido em B, escrevemos $A \not\subset B$. Isso significa que existe pelo menos um elemento de A que não pertence a B:

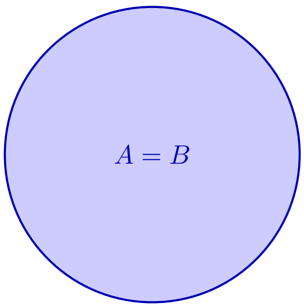
$$A \not\subset B \iff \exists a \in A \text{ tal que } a \notin B.$$

Exemplo. Considere V o conjunto das vogais, C o conjunto das consoantes e L o conjunto das letras, admitindo sempre o alfabeto português. É claro que $V \subset L$ e $C \subset L$, pois toda vogal e toda consoante são letras. Tem-se também $L \not\subset C$, pois existem letras (as vogais) que não são consoantes.

Exemplo. Na geometria plana, seja T o conjunto dos triângulos e P o conjunto dos polígonos. Todo triângulo é um polígono, logo $T \subset P$. Nem todo polígono é triângulo (um quadrado é polígono, mas não é triângulo); portanto $P \not\subset T$.

Duas inclusões extremas são sempre verdadeiras: $A \subset A$ (todo conjunto está contido em si mesmo) e $\varnothing \subset A$ (o conjunto vazio está contido em qualquer conjunto A). A justificativa da primeira é imediata, já que todo elemento de A está em A. A segunda pode causar estranheza, mas justifica-se assim: se $\varnothing \not\subset A$, deveria existir algum elemento $x \in \varnothing$ com $x \notin A$. Como $\varnothing$ não tem elementos, isso é impossível. Logo, $\varnothing \subset A$ é verdadeira.

Definição (Igualdade)**.** Dois conjuntos A e B são *iguais* se, e somente se, têm os mesmos elementos. Escrevemos $A = B$.



$A = B$ (mesmos elementos)

Exemplo. Os conjuntos $A = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}\}$ e $B = \{\mathrm{c}, \mathrm{b}, \mathrm{a}, \mathrm{a}\}$ são iguais, pois possuem os mesmos elementos (a repetição e a ordem não alteram o conjunto).

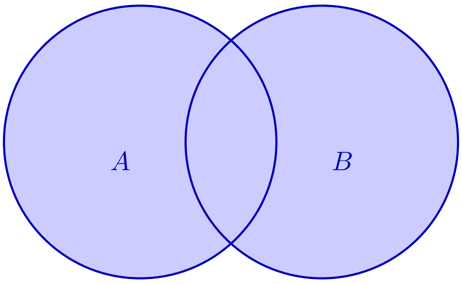
Observação. É comum confundir os símbolos $\in$ (pertinência) e $\subset$ (inclusão). A distinção é fundamental: $a \in A$ significa que o objeto a é um elemento do conjunto A; $A \subset B$ significa que todo elemento de A também é elemento de B (aqui A e B são conjuntos). Nunca se escreve $a \subset A$ (a menos que a também seja um conjunto — e mesmo assim, em cursos iniciais, evita-se essa notação para não gerar confusão). Note a relação entre os dois símbolos:

$$a \in A \iff \{a\} \subset A.$$

3.3 Operações

3.3.1 União

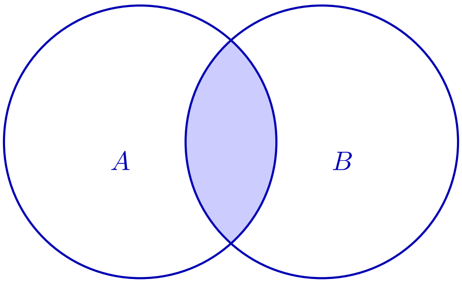
Definição (União)**.** A *união* de A e B, denotada por $A \cup B$, é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A **ou** a B.



$A \cup B$ (elementos que pertencem a A ou a B)

3.3.2 Interseção

Definição (Interseção)**.** A *interseção* de A e B, denotada por $A \cap B$, é o conjunto formado pelos elementos que pertencem simultaneamente a A **e** a B.



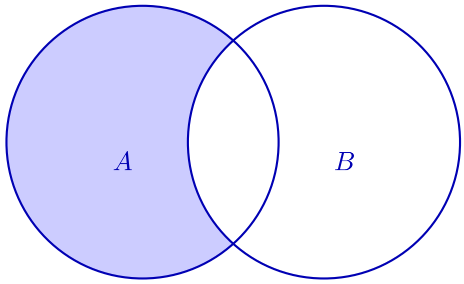
$A \cap B$ (elementos que pertencem a A e a B)

Simbolicamente:

$$x \in A \cup B \iff (x \in A) \vee (x \in B), \qquad x \in A \cap B \iff (x \in A) \wedge (x \in B).$$

3.3.3 Diferença

Definição (Diferença)**.** A *diferença* entre A e B, denotada por $A \setminus B$, é o conjunto dos elementos que pertencem a A e não pertencem a B.



$A \setminus B$ (elementos de A que não estão em B)

Simbolicamente:

$$x \in A \setminus B \iff (x \in A) \wedge (x \notin B).$$

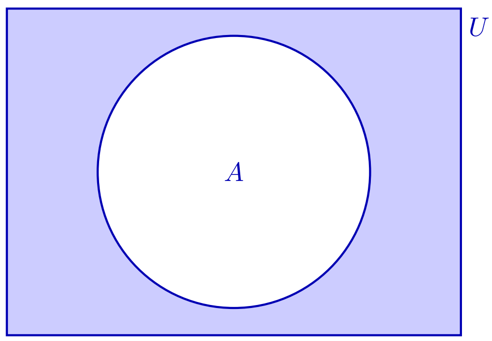
Exemplo. Sejam $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Então: $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A \cap B = \{3, 4, 5, 6\}$ e $A \setminus B = \{0, 1, 2\}$.

3.4 Conjunto Universo e Complementar

Em muitas situações, convém fixar um *conjunto universo* (ou *universo de discurso*), denotado por U, que contém todos os elementos relevantes para a discussão. Todos os demais conjuntos considerados serão subconjuntos de U.

Exemplo. Se estivermos estudando propriedades de triângulos equiláteros, isósceles ou retângulos, o conjunto universo pode ser o plano (mas também poderia ser o conjunto de todos os triângulos). Se estivermos estudando números primos, pares ou ímpares, o conjunto universo pode ser $\mathbb{N}$ (números naturais). Em cada caso, o conjunto dos objetos de interesse é um subconjunto do universo escolhido.

Definição (Complementar)**.** Dado um conjunto $A \subset U$, o *complementar* de A (em relação a U) é o conjunto $A^c = \{x \in U : x \notin A\}$. Em palavras, A^c é formado pelos elementos do universo que não pertencem a A.



A^c (complementar de A em relação a U)

Simbolicamente (com $x \in U$):

$$x \in A^c \iff x \notin A.$$

A noção de complementar só faz sentido quando o universo U está fixado.

Exemplo. Seja U o conjunto das letras do alfabeto português e A o conjunto das vogais. Então A^c é o conjunto das consoantes. Agora, se tomarmos U como o conjunto das letras da palavra "casa", ou seja, $U = \{\mathrm{c}, \mathrm{a}, \mathrm{s}\}$ (note que repetições não contam), e A continuar sendo o conjunto das vogais, então $A = \{\mathrm{a}\}$ e $A^c = \{\mathrm{c}, \mathrm{s}\}$. O complementar de A muda conforme alteramos o universo.

3.5 A Ponte entre Lógica e Conjuntos

Existe uma correspondência profunda entre lógica e conjuntos. Os conectivos lógicos "ou" ($\vee$) e "e" ($\wedge$) correspondem, respectivamente, às operações de união ($\cup$) e interseção ($\cap$). O condicional ($\to$) corresponde à relação de inclusão ($\subset$), e o bicondicional ($\leftrightarrow$) corresponde à relação de igualdade ($=$). Por fim, a negação ($\neg$) corresponde ao complementar (^{c}).

Considere duas propriedades $P(x)$ e $Q(x)$ e seus respectivos conjuntos de elementos que as satisfazem dentro de um universo U:

$$A = \{x \in U : P(x) \text{ é verdadeira}\} \quad \text{e} \quad B = \{x \in U : Q(x) \text{ é verdadeira}\}.$$

A correspondência se manifesta da seguinte maneira:

- **Disjunção** e **união**:

$$\forall x \in U, \ \big(P(x) \vee Q(x)\big) \iff x \in A \cup B.$$

- **Conjunção** e **interseção**:

$$\forall x \in U, \ \big(P(x) \wedge Q(x)\big) \iff x \in A \cap B.$$

- **Condicional** e **inclusão**:

$$\forall x \in U, \ \big(P(x) \to Q(x)\big) \iff A \subset B.$$

- **Equivalência** e **igualdade**:

$$\forall x \in U, \ \big(P(x) \leftrightarrow Q(x)\big) \iff A = B.$$

- **Negação** e **complementar**:

$$\forall x \in U,\ \neg P(x) \iff x \in A^c.$$

Observação. Essa correspondência torna os diagramas de Euler-Venn uma ferramenta legítima para verificar argumentos. Afirmar "Todo P é Q" equivale a desenhar o círculo que representa P dentro do círculo que representa Q (inclusão). A validade de um argumento — ou seja, a implicação lógica entre a conjunção das premissas e a conclusão — corresponde à seguinte propriedade: no diagrama construído a partir apenas das premissas, a região correspondente à conclusão já está inevitavelmente representada. Por exemplo, das premissas "Todo mamífero é animal" ($M \subset A$) e "Todo cão é mamífero" ($C \subset M$), o diagrama força $C \subset A$; a conclusão "Todo cão é animal" já está representada. Se fosse possível desenhar as premissas sem que a conclusão aparecesse, o argumento seria inválido.

3.6 Propriedades dos Conjuntos

Nesta seção, apresentamos as principais propriedades das operações entre conjuntos. As demonstrações seguem essencialmente o mesmo método: provar a igualdade de conjuntos mostrando duas inclusões ($\subset$ e $\supset$) ou, quando necessário, usando equivalências lógicas.

3.6.1 Propriedades demonstradas

Propriedade (Inclusões extremas). $\varnothing \subset A$ e $A \subset A$.

Demonstração. $A \subset A$ é imediato, pois todo elemento de A pertence a A. Para $\varnothing \subset A$: suponha, por absurdo, que $\varnothing \not\subset A$. Então existiria $x \in \varnothing$ com $x \notin A$. Mas $\varnothing$ não tem elementos — contradição. Logo, $\varnothing \subset A$. □

Propriedade (Igualdade e inclusão). $A = B \iff (A \subset B$ e $B \subset A)$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se $A = B$, eles têm os mesmos elementos. Se $A \not\subset B$, existiria $a \in A$ com $a \notin B$, contradição. Logo $A \subset B$. Analogamente, $B \subset A$. ($\Leftarrow$) Suponha $A \subset B$ e $B \subset A$. Se $A \neq B$, existiria um elemento em um dos conjuntos que não estaria no outro, contradizendo uma das inclusões. Logo, $A = B$. □

Propriedade (Transitividade da inclusão). $(A \subset B$ e $B \subset C) \implies A \subset C$.

Demonstração. Tome $x \in A$. Como $A \subset B$, $x \in B$. Como $B \subset C$, $x \in C$. Logo $A \subset C$. □

Propriedade (Elemento neutro da união). $A \cup \varnothing = A$.

Demonstração. ($\subset$) $x \in A \cup \varnothing \Rightarrow x \in A$ ou $x \in \varnothing$. Como $\varnothing$ é vazio, $x \in A$. ($\supset$) $x \in A \Rightarrow x \in A \cup \varnothing$. □

Propriedade (Comutatividade da união e da interseção). $A \cup B = B \cup A$ e $A \cap B = B \cap A$.

Demonstração. Para a união: $x \in A \cup B \iff x \in A$ ou $x \in B \iff x \in B$ ou $x \in A \iff x \in B \cup A$. A demonstração para a interseção é análoga, trocando "ou" por "e". $\square$

Propriedade (Distributividade). $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ e $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Demonstração. Provamos a primeira. A segunda é análoga. ($\subset$) Se $x \in A \cup (B \cap C)$, então $x \in A$ ou $x \in B \cap C$. Se $x \in A$, então $x \in A \cup B$ e $x \in A \cup C$. Se $x \in B \cap C$, então $x \in B$ e $x \in C$, logo $x \in A \cup B$ e $x \in A \cup C$. Em ambos os casos, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. ($\supset$) Se $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, então $x \in A \cup B$ e $x \in A \cup C$. Se $x \in A$, pronto. Se $x \notin A$, então de $x \in A \cup B$ vem $x \in B$, e de $x \in A \cup C$ vem $x \in C$. Assim $x \in B \cap C$, donde $x \in A \cup (B \cap C)$. $\square$

Propriedade (Absorção). $A \cup (A \cap B) = A$ e $A \cap (A \cup B) = A$.

Demonstração. Para a primeira: $A \cup (A \cap B) \subset A$ é imediato (todo elemento da união está em A). A inclusão $A \subset A \cup (A \cap B)$ é trivial. Logo a igualdade vale. Para a segunda: $A \cap (A \cup B) \subset A$ é imediato. Reciprocamente, se $x \in A$, então $x \in A \cup B$, logo $x \in A \cap (A \cup B)$. $\square$

Propriedade (Diferença como interseção com o complementar). $A \setminus B = A \cap B^c$.

Demonstração. Para todo $x \in U$, temos $x \in A \setminus B \iff (x \in A)$ e $(x \notin B) \iff (x \in A)$ e $(x \in B^c) \iff x \in A \cap B^c$. $\square$

Propriedade (Leis de De Morgan). $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ e $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Demonstração. Provamos a primeira. Para todo $x \in U$: $x \in (A \cup B)^c \iff x \notin A \cup B \iff x \notin A$ e $x \notin B \iff x \in A^c$ e $x \in B^c \iff x \in A^c \cap B^c$. A segunda é análoga, trocando "e" por "ou" e vice-versa. $\square$

Propriedade (Complementar do complementar). $(A^c)^c = A$.

Demonstração. $(A^c)^c = U \setminus A^c = U \setminus (U \setminus A)$. Se $x \in U \setminus (U \setminus A)$, então $x \in U$ e $x \notin U \setminus A$. Como $x \in U$, a condição $x \notin U \setminus A$ implica $x \in A$. Logo $U \setminus (U \setminus A) \subset A$. A inclusão inversa é imediata: se $x \in A$, então $x \in U$ e $x \notin U \setminus A$, pois $x \in A$. Portanto $(A^c)^c = A$. $\square$

3.6.2 Propriedades deixadas como exercícios

As propriedades a seguir podem ser demonstradas seguindo exatamente os mesmos métodos (dupla inclusão ou equivalência lógica). Recomenda-se que o leitor as demonstre como exercício.

Observação. Ao realizar os exercícios de demonstração, tente perceber como cada propriedade de conjunto é a "tradução" de uma propriedade lógica. Por exemplo, a distributividade da união sobre a interseção (já demonstrada) é a tradução da distributividade do conectivo "ou" sobre o "e".

- **Idempotência:** $A \cup A = A$ e $A \cap A = A$.
- **Associatividade:** $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ e $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
- **Inclusão e união:** $A \subset B \implies A \cup B = B$.
- **Inclusão e interseção:** $A \subset B \implies A \cap B = A$.
- **Absorção pelo vazio:** $A \cap \varnothing = \varnothing$.
- **Diferença com o vazio:** $A \setminus \varnothing = A$.
- **Diferença de um conjunto por si mesmo:** $A \setminus A = \varnothing$.
- **Diferença do vazio:** $\varnothing \setminus A = \varnothing$.
- **Relação entre diferença e inclusão:** $A \setminus B = \varnothing \iff A \subset B$.
- **Distributividade da diferença:** $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ e $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
- **Complementar da diferença:** $(A \setminus B)^c = A^c \cup B$.
- **União com o complementar (terceiro excluído):** $A \cup A^c = U$.
- **Interseção com o complementar (contradição):** $A \cap A^c = \varnothing$.
- **Complementar do universo:** $U^c = \varnothing$.
- **Complementar do vazio:** $\varnothing^c = U$.
- **Leis de De Morgan:** Verificar que as leis de De Morgan para conjuntos — $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ e $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ — são reflexos diretos das leis de De Morgan da lógica: $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$ e $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$.

Observação. A ordem dos exercícios não reflete necessariamente a dificuldade. Algumas propriedades (como a associatividade) têm demonstrações mais longas, mas seguem exatamente o padrão das demonstrações apresentadas.

4 A Estrutura de uma Teoria Matemática

4.1 Axiomas e Definições: o ponto de partida

Na matemática, todo conhecimento é organizado de forma hierárquica e rigorosa. No entanto, essa organização nos impõe um limite linguístico e lógico fundamental: **não somos capazes de definir todas as coisas**. Se tentássemos definir cada termo utilizado, precisaríamos recorrer a outros termos que, por sua vez, exigiriam suas próprias definições, ocasionando um retorno sem fim — uma regressão infinita que inviabilizaria a construção de qualquer sistema coerente.

Para evitar esse impasse, a matemática aceita a existência de **conceitos primitivos**. Estes são termos que não possuem uma definição formal dentro da teoria, sendo adotados a partir da intuição ou do consenso. Partimos, portanto, desses conceitos e de verdades assumidas para, por meio de demonstrações, construir novos conhecimentos.

Um *axioma* (ou *postulado*) é uma proposição considerada verdadeira por si mesma, sem necessidade de demonstração. Assim como os conceitos primitivos funcionam para os termos, os axiomas são o ponto de partida de uma teoria para as proposições — eles não são provados, mas sim assumidos como verdades fundamentais que sustentam todo o raciocínio subsequente.

Uma *definição* é uma convenção que introduz um novo conceito ou termo, atribuindo-lhe um significado preciso a partir de termos já conhecidos ou primitivos. As definições não podem ser classificadas como verdadeiras ou falsas; elas são acordos linguísticos que permitem comunicar ideias matemáticas com precisão.

Exemplo. Na geometria euclidiana, "ponto" e "reta" são conceitos primitivos (não definidos formalmente). Um axioma clássico é: "Por dois pontos distintos passa uma única reta". Uma definição: "Um triângulo é a figura formada por três pontos não colineares e pelos segmentos que os conectam".

4.2 Resultados Demonstrados

Quando uma proposição é demonstrada dentro de uma teoria, ela pode ser classificada de diferentes formas, dependendo de sua importância e função:

- *Teorema*: proposição de grande importância, demonstrada a partir dos axiomas, definições e outros resultados já estabelecidos.
- *Lema*: proposição auxiliar, geralmente demonstrada como um passo intermediário para provar um teorema. Lemas funcionam como ferramentas para facilitar provas mais complexas.
- *Corolário*: consequência direta e imediata de um teorema. Sua demonstração é curta e deriva naturalmente do resultado principal.

- *Proposição*: resultado demonstrado com importância intermediária. Frequentemente descreve propriedades relevantes que não possuem o *status* de um teorema.

4.3 Teoremas e Demonstrações

Um teorema é uma proposição demonstrada. Os teoremas geralmente têm a forma de implicação lógica ($p \Rightarrow q$) ou equivalência lógica ($p \Leftrightarrow q$).

Em um teorema do tipo $p \Rightarrow q$:

- p é chamado de **hipótese** (ou antecedente);
- q é chamado de **tese** (ou consequente).

Para demonstrar um teorema da forma $p \Rightarrow q$, assume-se a hipótese como verdadeira e, utilizando argumentos válidos, prova-se que a tese é verdadeira usando a hipótese. O caso em que p é falsa é ignorado, pois a implicação $p \Rightarrow q$ é considerada **válida por vacuidade** (nada podemos concluir sobre q quando p é falsa, mas a implicação em si não é refutada). Se o teorema for do tipo $p \Leftrightarrow q$, demonstram-se duas implicações: $p \Rightarrow q$ (ida) e $q \Rightarrow p$ (volta). A implicação $p \Rightarrow q$ é logicamente equivalente à sua **contrapositiva**:

$$p \Rightarrow q \quad \equiv \quad \neg q \Rightarrow \neg p.$$

Portanto, provar que p implica q é o mesmo que provar que a negação de q implica a negação de p. Essa técnica é muito útil em demonstrações.

Observação. Nem toda condicional constitui um teorema. Por exemplo, a proposição "Se todo homem é mortal, então $2+2=4$" é verdadeira (pois ambos os lados o são), mas não é um teorema matemático, pois a conclusão não é demonstrada a partir da hipótese. Em matemática, ao enunciar um teorema na forma $p \Rightarrow q$, exige-se que a verdade de q seja obtida mediante o uso da hipótese p (além dos axiomas e resultados já estabelecidos).

Outro método clássico é a **prova por contradição**. Suponha que queremos verificar que a proposição q é verdadeira. O método consiste em:

- Supor, temporariamente, que q é falsa (ou seja, assumir $\neg q$).
- A partir dessa suposição, usando argumentos válidos, chegar a uma contradição — uma proposição da forma $p \wedge \neg p$ (algo logicamente impossível).
- Concluir que a suposição inicial ($\neg q$) é insustentável; portanto, q é verdadeira.

Em termos lógicos, o método corresponde à tautologia:

$$(\neg q \Rightarrow (p \wedge \neg p)) \Rightarrow \; q.$$

Observação. A validade da prova por contradição apoia-se no princípio do terceiro excluído ($p \vee \neg p$). Suponha que, ao assumir $\neg p$, chegamos a uma contradição. Então $\neg p$ não pode ser verdadeira; logo, pelo terceiro excluído, p é verdadeira. Em outras palavras, não há uma "terceira possibilidade" além de p ou $\neg p$.

Em lógicas que rejeitam o terceiro excluído — chamadas *lógicas intuicionistas* — a prova por contradição não é aceita em sua forma plena; nesses sistemas, provar que $\neg p$ leva a contradição permite concluir apenas $\neg\neg p$, não necessariamente p. Isso remete ao debate sobre o intuicionismo matemático, liderado por Brouwer (1881–1966) [10]. Esse aprofundamento foge ao escopo destas notas, mas é bom que o licenciando saiba da existência dessa discussão.

4.4 Observação sobre a nomenclatura

A distinção entre lema, proposição, teorema e corolário não é rígida. O que um autor denomina lema, outro pode classificar como proposição ou até mesmo teorema. A escolha depende da ênfase e da organização didática, mas o ponto fundamental é que todos representam resultados demonstrados.

Leituras Recomendadas

Sobre Lógica e Conjuntos (nível introdutório):

- ALENCAR, Marcelo. *Lógica Matemática para Licenciatura*. São Paulo: Livraria da Física, 2018.
- GERSTING, Judith L. *Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação*. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017. (Capítulos 1–4 sobre lógica e conjuntos)
- MORTARI, Cezar A. *Introdução à Lógica*. São Paulo: Editora Unesp, 2017.
- SCHEINERMAN, Edward R. *Matemática Discreta: Uma Introdução*. São Paulo: Cengage Learning, 2011. (Capítulos 1 e 2)

Sobre Teoria dos Conjuntos (aprofundamento):

- HALMOS, Paul R. *Naive Set Theory*. Nova York: Springer, 1974. (Clássico acessível, em inglês)
- LIPSCHUTZ, Seymour. *Teoria dos Conjuntos*. São Paulo: McGraw-Hill, 1972. (Livro antigo, mas muito didático)
- VAZ, Sérgio. *Notas de Aula de Teoria dos Conjuntos*. Universidade de Brasília, 2019. (Disponível *online* para *download*)

Sobre fundamentos da matemática e história:

- BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2012. (Capítulos sobre lógica e conjuntos)
- KLEENE, Stephen Cole. *Introdução à Metamatemática*. Rio de Janeiro: Ed. da UFRJ, 2009. (Avançado, para aprofundamento)
- RUSSELL, Bertrand. *Introdução à Filosofia Matemática*. Rio de Janeiro: Zahar, 2006.

Referências

[1] ARISTÓTELES. *Organon*. Tradução de P. Gomes. Lisboa: Imprensa Nacional-Casa da Moeda, 2005. (Coleção Biblioteca de Autores Clássicos).

[2] BOOLE, George. *An Investigation of the Laws of Thought*. London: Walton and Maberly, 1854.

[3] FREGE, Gottlob. *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. Halle: Louis Nebert, 1879.

[4] CANTOR, George. *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*. Mathematische Annalen, v. 46, n. 4, p. 481–512, 1895.

[5] RUSSELL, Bertrand. *Os Princípios da Matemática*. Tradução de Maria Luisa X. de A. Borges. São Paulo: Editora Unesp, 2012. (Original publicado em 1903).

[6] ZERMELO, Ernst; FRAENKEL, Abraham. *Axiomatic Set Theory*. In: HEIJERMANN, H. (Ed.). *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic*. Cambridge: Harvard University Press, 1967. p. 199–215.

[7] GÖDEL, Kurt. Sobre proposições formalmente indecidíveis do *Principia Mathematica* e sistemas relacionados. In: GÖDEL, Kurt. *Obras Completas*. Rio de Janeiro: Ed. da UFRJ, 2002.

[8] DESCARTES, René. *Discurso do Método*. Tradução de Paulo M. Oliveira. São Paulo: Martins Fontes, 2001. (Original publicado em 1637).

[9] KANT, Immanuel. *Crítica da razão pura*. Tradução de Manuela Pinto dos Santos e Alexandre Fradique Morujão. 5. ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2001. (Original publicado em 1781/1787).

[10] BROUWER, Luitzen Egbertus Jan. *On the significance of the principle of excluded middle in mathematics, especially in function theory*, 1923.