

O Primeiro Limite Fundamental

Prof. Dr. Clayton Eduardo Lente da Silva
Universidade Federal de Rondonópolis

Agosto de 2024

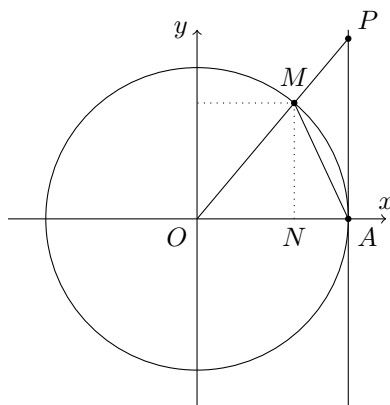
Ao estudarmos Cálculo Diferencial e Integral, dois limites destacam-se como *fundamentais*, sendo o primeiro de natureza trigonométrica e o segundo de natureza exponencial. Estas notas tratam do primeiro limite fundamental, expresso por

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x}.$$

É comum afirmar que este limite equivale a 1. Contudo, tal resultado só é válido se a unidade de medida no ciclo trigonométrico for o *radiano*. Sob a unidade *grau*, o valor difere substancialmente, como verificamos adiante. De início, tomamos o limite quando $x \rightarrow 0^+$, ou seja, $x \rightarrow 0$ e $x > 0$. O caso em que $x \rightarrow 0^-$, isto é, $x \rightarrow 0$ e $x < 0$, é similar, e também está descrito adiante.

A análise apoia-se na geometria plana, por meio do ciclo trigonométrico. Consideramos a circunferência de centro na origem O e raio com medida 1. Sejam A o ponto de intersecção da circunferência com a parte positiva do eixo das abscissas, M um ponto da circunferência no primeiro quadrante, N a projeção ortogonal de M sobre o eixo das abscissas e P o ponto de intersecção da semirreta de origem O que contém M com a reta tangente à circunferência em A . A ilustração está na Figura 1.

Figura 1 – Representação geométrica no ciclo trigonométrico para demonstração do primeiro limite fundamental.



Fonte: O autor.

A demonstração do primeiro limite fundamental baseia-se essencialmente no conceito de *área* de uma superfície plana. Na Figura 1, consideramos o triângulo OMA , o setor circular OMA e o triângulo OPA . Como o segmento MA é uma corda, é possível provar que a área do triângulo OMA é menor do que a área do setor circular OMA . E como P é um ponto exterior ao círculo, também é possível provar que a área do setor circular OMA é menor do que a área do triângulo OPA . Ambos os fatos estão demonstrados no item 4 das considerações finais.

Ao ângulo central $A\hat{O}M$, cuja medida é θ° , corresponde um arco \widehat{AM} de medida α rad no ciclo trigonométrico, e vice-versa. Faz-se, portanto, uma correspondência biunívoca entre as medidas de ângulos e as medidas de arcos. Assim, para $x \rightarrow 0^+$, admite-se ou $x = \theta^\circ$ com $0 < \theta < 90$, ou $x = \alpha$ rad com \widehat{AM} um arco do primeiro quadrante. No ciclo trigonométrico, uma volta completa tem 360° ou 2π rad, o que equivale a dizer que 180° corresponde biunivocamente a π rad.

Calculamos, enfim, as áreas do triângulo OMA , do setor circular OMA e do triângulo OPA , a fim de usarmos as desigualdades dessas áreas. As áreas são obtidas adotando cada uma das duas unidades de medida (grau e radiano). As funções trigonométricas seno e tangente surgem como as alturas respectivas NM e AP dos triângulos OMA e OPA , ambos de base OA .

Sob a unidade grau, a área do triângulo OMA é $\frac{1}{2} \text{sen } \theta^\circ$ e a área do triângulo OPA é $\frac{1}{2} \tan \theta^\circ$. A área do setor circular é a fração correspondente a θ° da área total π do círculo, ou seja, $\frac{\pi}{360} \theta$. Assim

$$\frac{1}{2} \text{sen } \theta^\circ < \frac{\pi}{360} \theta < \frac{1}{2} \tan \theta^\circ, \text{ ou seja, } \text{sen } \theta^\circ < \frac{\pi}{180} \theta < \tan \theta^\circ.$$

Como $\theta \neq 0$, dividimos cada expressão por $\text{sen } \theta^\circ$, obtendo

$$1 < \frac{\pi}{180} \cdot \frac{\theta}{\text{sen } \theta^\circ} < \frac{1}{\cos \theta^\circ}, \text{ e daí, } \cos \theta^\circ < \frac{180}{\pi} \cdot \frac{\text{sen } \theta^\circ}{\theta} < 1.$$

Dado que $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \cos \theta^\circ = 1$, o Teorema do Confronto garante que

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{180}{\pi} \cdot \frac{\text{sen } \theta^\circ}{\theta} = 1, \text{ ou } \frac{180}{\pi} \cdot \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen } \theta^\circ}{\theta} = 1, \text{ e assim, } \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen } \theta^\circ}{\theta} = \frac{\pi}{180}.$$

Relativamente ao caso $\theta \rightarrow 0^-$ ($\theta \rightarrow 0$ e $\theta < 0$), admite-se θ um ângulo do quarto quadrante obtido no sentido horário. Através de construções geométricas similares, e considerando que $\theta < 0$, $\text{sen } \theta^\circ < 0$ e $\tan \theta^\circ < 0$, obtêm-se as desigualdades

$$-\text{sen } \theta^\circ < -\frac{\pi}{180} \cdot \theta < -\tan \theta^\circ, \text{ ou seja, } \text{sen}(-\theta^\circ) < \frac{\pi}{180} \cdot (-\theta) < \tan(-\theta^\circ),$$

já que as funções seno, tangente e identidade são ímpares. Fazendo $\phi = -\theta > 0$, tem-se $\text{sen } \phi^\circ < \frac{\pi}{180} \cdot \phi < \tan \phi^\circ$ com $\phi \rightarrow 0^+$, que já foi tratado. Portanto,

$$\frac{\pi}{180} = \lim_{\phi \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen } \phi^\circ}{\phi} = \lim_{\theta \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen}(-\theta^\circ)}{-\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0^-} \frac{-\text{sen } \theta^\circ}{-\theta}, \text{ e daí, } \lim_{\theta \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen } \theta^\circ}{\theta} = \frac{\pi}{180}.$$

Como os limites laterais à direita e à esquerda existem e são iguais a $\frac{\pi}{180}$, conclui-se que

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\text{sen } \theta^\circ}{\theta} = \frac{\pi}{180} = 0,017453\dots \text{ (irracional).}$$

A interpretação desse limite é que, para valores de θ suficientemente próximos de zero, a função trigonométrica seno pode ser aproximada pela função linear de inclinação $\frac{\pi}{180}$.

Verificamos o comportamento distinto sob a unidade grau. Analisemos agora o caso da unidade radiano, onde esperamos encontrar o resultado familiar.

Sob a unidade radiano, a área do triângulo OMA é $\frac{1}{2} \text{sen } \alpha$, a área do setor circular é $\frac{1}{2} \alpha$ e a área do triângulo OPA é $\frac{1}{2} \tan \alpha$. A estrito rigor, deveríamos escrever $\text{sen}(\alpha \text{ rad})$ e $\tan(\alpha \text{ rad})$, mas é comum a omissão da unidade. Assim

$$\text{sen } \alpha < \alpha < \tan \alpha, \text{ ou seja, } \cos \alpha < \frac{\text{sen } \alpha}{\alpha} < 1.$$

Usando as análises anteriores dos limites laterais, mas agora sob a unidade radiano, e usando novamente do Teorema do Confronto, tem-se

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\text{sen } \alpha}{\alpha} = 1.$$

Este limite nos diz que, para valores de α suficientemente próximos de zero, a função trigonométrica seno pode ser aproximada pela função identidade.

Conclui-se, portanto, que o primeiro limite fundamental equivale a 1 sob a unidade radiano e equivale a $\frac{\pi}{180}$ sob a unidade grau.

Considerações Finais

1- Sobre grau e radiano.

O grau é uma unidade de medida milenar originada na Babilônia. Alguns historiadores sugerem que a divisão da circunferência em 360 partes iguais decorre da crença de que essa era a quantidade de dias referente ao período de um ano, enquanto outros sugerem ter relação com o sistema de numeração babilônico, que era sexagesimal. Já o radiano é uma unidade de medida criada na Europa durante o período do Renascimento, para facilitar algumas manipulações do Cálculo.

Uma consequência do primeiro limite fundamental diz respeito à inclinação da função seno na origem. Sob a unidade grau, esta inclinação é menor do que sob a unidade radiano. Isso tem importantes consequências quando estuda-se as *derivadas* das funções trigonométricas. Sem a invenção do radiano, na derivada da função seno surgiria o fator $\pi/180$. Isto tornaria dispendiosa as manipulações das derivadas das funções trigonométricas e suas derivadas de ordens mais altas.

O que se está a fazer, na verdade, é um ajuste de escala no estudo das funções trigonométricas. Observamos que 1° é da ordem de centésimo de 1 rad. O radiano

nada mais é do que a medida do arco que tem comprimento igual ao raio. Uma circunferência comporta em sua volta completa 2π raios da mesma circunferência. Como o ciclo trigonométrico tem raio de medida 1, o valor de 1 rad coincide com o comprimento desse raio, que é 1. Por isso é comum ignorar a escrita da unidade quando se estuda as funções trigonométricas em radianos.

2- Unidades de medida no primeiro limite fundamental.

A correspondência biunívoca entre θ° e α rad, nos dá a relação $\alpha = \frac{\pi}{180}\theta$. Desse modo, podemos escrever

$$1 = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\text{sen } \alpha}{\alpha} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\text{sen } \theta^\circ}{(\pi/180)\theta} = \frac{180}{\pi} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\text{sen } \theta^\circ}{\theta}, \text{ e assim, } \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\text{sen } \theta^\circ}{\theta} = \frac{\pi}{180}.$$

É importante notar que, no cálculo da área do setor circular, a unidade de medida (grau ou radiano) é cancelada. Por isso, o número que aparece no denominador do primeiro limite fundamental não é acompanhado da unidade.

Quando se escreve

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x},$$

é claro que a unidade de medida considerada é o radiano e não o grau. Do contrário, deveria-se escrever

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x^\circ}{x}.$$

Justamente por isso que foi mencionado, no início destas notas, que é comum considerar o valor do primeiro limite fundamental como sendo igual a 1. Aliás, em Cálculo Diferencial e Integral, está implícito que a unidade considerada no estudo das funções trigonométricas é o radiano.

3- Usando a calculadora.

Coloque a sua calculadora em graus e calcule o quociente $(\text{sen } \theta^\circ)/\theta$ para valores θ positivos cada vez mais próximos de zero. Repita o processo, agora com a sua calculadora em radianos, para o quociente $(\text{sen } \alpha)/\alpha$. Anote os resultados em uma tabela. Que padrão você observa?

4- Desigualdades das áreas.

Recordamos a seguir alguns conceitos fundamentais de área. Sejam $R \neq \emptyset$ uma superfície plana e $a(R)$ sua área. Quando tratamos da medida dessa superfície plana, lançamos mão de alguns axiomas, como por exemplo: i) $a(R) > 0$; ii) Superfícies planas congruentes têm mesma área; iii) Se R e S são superfícies planas e $R \cap S = \emptyset$, então $a(R \cup S) = a(R) + a(S)$. Por superfícies planas congruentes, deve-se entender a mesma superfície, exceto por movimentos rígidos no plano. A partir destes axiomas, prova-se que se R e S são superfícies planas tais que $R \subsetneq S$, então $a(R) < a(S)$. De fato, como $S = R \cup (S \setminus R)$ e $R \cap (S \setminus R) = \emptyset$, tem-se $a(S) = a(R) + a(S \setminus R)$, ou seja, $a(R) < a(S)$ pois $a(S \setminus R) > 0$.

Denotamos por R , S e T as superfícies dadas, respectivamente, pelo triângulo OMA , pelo setor circular OMA e pelo triângulo OPA . Como os segmentos OM e OA são lados do triângulo OMA e também determinam o setor circular OMA , sendo o segmento MA uma corda, conclui-se que $S = R \cup (S \setminus R)$ e, portanto, $a(R) < a(S)$. É importante notar que uma corda divide o círculo em duas partes não vazias. A superfície R está contida em uma dessas partes, enquanto a superfície $S \setminus R$ está contida na outra. Os segmentos OP e OA são lados do triângulo OPA . Como $OM \subsetneq OP$ e os segmentos OM e OA determinam o setor circular OMA , então P é ponto exterior ao círculo. Assim, $T = S \cup (T \setminus S)$ e, portanto, $a(S) < a(T)$. Logo, seguem as desigualdades das áreas $a(R) < a(S) < a(T)$.