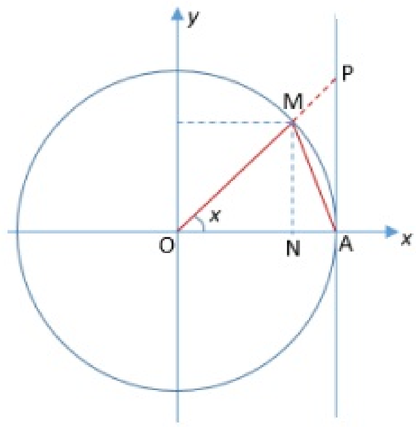
O Primeiro Limite Fundamental

Clayton Eduardzwo Lente da Silva
Universidade Federal de Rondonópolis
Agosto de 2024

Em Cálculo Diferencial e Integral estuda-se dois limites chamados *fundamentais*. O primeiro é o limite fundamental trigonométrico

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

É comum dizer que este limite é igual a 1. Mas isto só é verdade se a unidade de medida de arcos das funções trigonométricas for o *radiano*. Se a unidade de medida for o *grau*, não é verdade que este limite seja igual a 1. Afinal, qual é o valor do limite fundamental trigonométrico para x medido em grau? Analisemos a situação quando $x \to 0^+$ ($x \to 0$ e $x > 0$). Toda a nossa análise será baseada em argumentos geométricos.



Como $x \to 0^+$, admite-se x um ângulo do primeiro quadrante conforme a figura acima. Sabe-se, da geometria euclidiana, que a área do triângulo T_{OMA} é menor do que a área do setor circular S_{OMA}, já que o segmento MA é uma corda. Sabe-se ainda que a área do setor circular S_{OMA} é menor do que a área do triângulo T_{OPA}, já que P é ponto externo ao círculo trigonométrico. O segmento OA é o raio do círculo trigonométrico, logo sua medida é igual a 1. Os segmentos MN e PA medem $\operatorname{sen} x$ e $\operatorname{tg} x$, respectivamente. Assim, as desigualdades das áreas nos fornece, após as devidas simplificações, que $\operatorname{sen} x < (\pi/180) \cdot x < \operatorname{tg} x$, ou seja, $1 < (\pi/180) \cdot (x/\operatorname{sen} x) < (1/\cos x)$, e daí, $\cos x < (180/\pi) \cdot (\operatorname{sen} x)/x < 1$. Observe que no cálculo da área do setor circular S_{OMA}, a unidade grau é cancelada, já que aparece tanto no numerador quanto no denominador. Dado que $\lim_{x\to 0^+} \cos x = 1$, pelo Teorema do Confronto, obtém-se

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{180}{\pi} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1, \quad \text{ou seja,} \quad \frac{180}{\pi} \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1, \quad \text{e assim,} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{\pi}{180}.$$

Para o caso $x \to 0^-$ ($x \to 0$ e $x < 0$), admite-se x um ângulo obtido no sentido horário. Através de construções geométricas similares, obtem-se as desigualdades $-\operatorname{sen} x < -(\pi/180) \cdot x < -\operatorname{tg} x$, e como seno, tangente e identidade são funções ímpares, então $\operatorname{sen}(-x) < (\pi/180) \cdot (-x) < \operatorname{tg}(-x)$. Considerando a mudança de variáveis $y = -x > 0$, tem-se $\operatorname{sen} y < (\pi/180) \cdot y < \operatorname{tg} y$ com $y \to 0^+$, que já foi tratado anteriormente. Portanto

$$\frac{\pi}{180} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-\operatorname{sen} x}{-x}, \quad \text{ou seja,} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{\pi}{180}.$$

Como os limites laterais à esquerda e à direita existem e são iguais a $\pi/180$, conclui-se que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{\pi}{180} = 0,017453...\text{(irracional) para } x \text{ medido em grau.}$$

Fazendo 180 graus corresponderem a π radianos, então a área do setor circular S_{OMA} será $x/2$, e daí, $\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$, ou seja, $\cos x < (\operatorname{sen} x)/x < 1$. Pelo Teorema do Confronto, obtem-se

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \ \text{ para } x \text{ medido em radiano.}$$

<u>Considerações</u>: i) Coloque sua calculadora em graus e faça a conta $(\operatorname{sen} x)/x$ para valores x positivos cada vez mais próximos de zero. Repita o processo com a sua calculadora em radianos; ii) Grau é uma unidade de medida milenar originada na Babilônia. Alguns historiadores sugerem que a divisão da circunferência em 360 partes iguais decorrem da crença de que essa era a quantidade de dias referente ao período de um ano, enquanto outros sugerem ter relação com o sistema de numeração babilônico que era sexagesimal. Já o radiano é uma unidade de medida criada na Europa durante o período do Renascimento, para facilitar algumas manipulações do Cálculo Diferencial e Integral.